Γιώργος Μονάντερος

Άλγεβρα

Α΄ Λυκείου

Βιβλίο Μαθητή

36 Κριτήρια Αξιολόγησης

18 Διαγωνίσματα

15 Διαγωνίσματα Προσομοίωσης εξετάσεων

180 Ασκήσεις

απέναντι ΕΚΔΟΣΕΙΣ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Ενότητα 8

Εξισώσεις 2ου Βαθμού

Θεωρία

Α. Λύση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης $αx^2+βx+γ=0$, $α \neq 0$

- Αν Δ > 0 η εξίσωση έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες τις:

$$x_1 = \frac{-β+\sqrt{Δ}}{2α}, χ_2 = \frac{-β-\sqrt{Δ}}{2α}$$

- Αν Δ = 0 η εξίσωση έχει μια διπλή ρίζα (δυο ρίζες ίσες) τη $χ = -\frac{β}{2α}$
- Αν Δ < 0 η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες.

Β. Το άθροισμα S και το γινόμενο P των ριζών της εξίσωσης $αx^2+βx+γ=0, α \neq 0$ είναι:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{β}{α}$$

$$P = x_1 x_2 = \frac{γ}{α}$$

Αν δυο αριθμοί έχουν άθροισμα S και γινόμενο P προσδιορίζονται από την λύση της εξίσωσης

$$x^2 - Sx + P = 0$$

Γ. Πρόσημο των ριζών x_1, x_2 της $αx^2+βx+γ=0, α \neq 0$ (Δ>0)

$P = \frac{γ}{α} < 0$	ρίζες ετερόσημες $\mathbf{x_1 < 0 < x_2}$	
$P = \frac{γ}{α} = 0$	οι ρίζες είναι 0 και $-\frac{β}{α}$	
$P = \frac{γ}{α} > 0$	$S = -\frac{β}{α} > 0$	δυο ρίζες θετικές $0 < x_1 < x_2$
	$S = -\frac{β}{α} < 0$	δυο ρίζες αρνητικές $x_1 < x_2 < 0$

2. ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

- Τριώνυμο είναι κάθε παράσταση που μπορεί να πάρει τη μορφή $\alpha x^2+\beta x+\gamma$.
- Ρίζες του τριωνύμου είναι οι τιμές του x για τις οποίες $\alpha x^2+\beta x+\gamma = 0$.
- Αν Δ > 0 Το τριώνυμο έχει δύο ρίζες άνισες τις $x_1 = \frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$, $x_2 = \frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$ και αποδεικνύεται ότι μπορεί να πάρει τη μορφή:

  $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - x_1)(x - x_2)$.

- Αν Δ= 0.Το τριώνυμο έχει μία διπλή ρίζα την $-\frac{\beta}{2\alpha}$ και αποδεικνύεται ό τι μπορεί να πάρει τη μορφή: $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$

- **ΆΘΡΟΙΣΜΑ ΚΑΙ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΡΙΖΩΝ ΕΞΙΣΩΣΗΣ 2^ου^ ΒΑΘΜΟΥ**

  $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \quad \alpha \neq 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{\beta}{\alpha}x + \frac{\gamma}{\alpha} = 0 \Leftrightarrow x^2 - Sx + P = 0$

  όπου $S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha}$ και $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha}$

  Συχνά τίθενται διάφορα ερωτήματα στα οποία η χρήση του S και P είναι επιβεβλημένη. Αυτά είναι τα παρακάτω. Έστω η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ ($\alpha \neq 0$). Πότε η εξίσωση έχει:

  - Ρίζες ετερόσημες $\rightarrow \Delta > 0$ και $P \leq 0$
  - Ρίζες ομόσημες $\rightarrow \Delta \geq 0$ και $P > 0$
  - Ρίζες αντίθετες $\rightarrow \Delta > 0$ και $S = 0$
  - Ρίζες αντίστροφες $\rightarrow \Delta \geq 0$ και $P = 1$
  - Ρίζες θετικές $\rightarrow \Delta \geq 0$ και $S > 0$ και $P > 0$
  - Ρίζες αρνητικές $\rightarrow \Delta \geq 0$ και $S < 0$ και $P > 0$

$8^{η}$ Αξιολόγηση Σωστό – Λάθος

Εξισώσεις $2^{ου}$ Βαθμού

1. Αν στη εξίσωση $αx^2+βx+γ=0\,(α\neq 0)$ τα α,γ είναι ετερόσημα, τότε Δ>0
2. Αν Δ=0, τότε η εξίσωση $αx^2+βx+γ=0\,(α\neq 0)$ έχει μια διπλή ρίζα, την $x=-\dfrac{β}{2α}$
3. Αν $β^2>4αγ$ τότε η εξίσωση $αx^2+βx+γ=0$, $(α\neq 0)$ έχει δύο ρίζες άνισες τις $x_{1,2}=\dfrac{-β\pm\sqrt{Δ}}{2α}$
4. Η εξίσωση $x^2+1=0$ έχει λύσεις $x=\pm 1$
5. Η εξίσωση $3x^2-5x=0$ έχει λύσεις $x=0$ ή $x=\dfrac{5}{3}$
6. Αν $Δ>0$, τότε πρέπει $\mathbf{αγ<0}$
7. Η $αx^2+βx+γ=0$, αν α>0, β=0 και γ>0 είναι αδύνατη
8. Η εξίσωση $2x^2-(\sqrt{3}+1)x-3=0$ είναι αδύνατη
9. Αν η εξίσωση $x^2+x-βγ=0$ έχει δύο ρίζες άνισες , τότε $4βγ\geq 1$
10. Αν $β^2>4αγ$ τότε η εξίσωση $αx^2+βx+γ=0\,(α\neq 0)$ έχει δύο ρίζες άνισες τις $x_{1,2}=\dfrac{-β\pm\sqrt{Δ}}{2α}$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

$8^{η}$ Αξιολόγηση Πολλαπλής Επιλογής

Εξισώσεις $2^{ου}$ Βαθμού

Θέμα 1ο

Η εξίσωση $2x^2 - 2x + 2 = x^2 + 3x - 2$:

Απάντηση

Α. έχει λύσεις 4,1 Β. έχει λύσεις –1,4 Γ. είναι αδύνατη
Δ. έχει λύσεις –1,-4 Ε. είναι αόριστη

Θέμα 2ο

Η εξίσωση $x^2 - αx - α^2 - 1 = 0$:

Απάντηση

Α. έχει δύο ρίζες άνισες για κάθε $α \in R$ Β. έχει δύο ρίζες άνισες για $α \neq 1$
Γ. είναι αδύνατη Δ. έχει μια ρίζα διπλή Ε. είναι αόριστη

Θέμα 3ο

Αν η εξίσωση $x^2 + x - βγ = 0$ δεν έχει πραγματικές ρίζες τότε:

Απάντηση

Α. 4βγ<1 Β.4βγ>1 Γ.4βγ< -1 Δ.4βγ>-1 Ε.2βγ>-1

Θέμα 4ο

Αν Δ είναι η διακρίνουσα της εξίσωσης $x^2 + βx + α = 0$, τότε:

Απάντηση

Α. $Δ = α^2 - 4β$ Β. $Δ = β^2$ Γ. $Δ = β^2 - 4αγ$ Δ. $Δ = β^2 - 4α$ Ε. $Δ = 0$

Θέμα 5ο

Ποια από τις παρακάτω εξισώσεις έχει δύο ρίζες άνισες;

Απάντηση

Α. $x^2 - x + 5 = 0$ Β. $x^2 + 2κx + κ^2 = 0$ Γ. $x^2 - 2x + 7 = 0$

Δ. $x^2 - x - κ^2 = 0$ Ε. $x^2 - 6x + 9 = 0$

Ασκήσεις

Εξισώσεις 2ου Βαθμού

1. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις

Α. $x^2 - 4x = 0$ Β. $3x^2 = 8x$ Γ. $2x^2 + x - 15 = 0$ Δ. $5x^2 - 18x - 8 = 0$

Ε. $x^2 - 6x + 5 = 0$ ΣΤ. $y^2 - y + 4 = 0$ Ζ. $y^2 - (\alpha + 3)y + 3\alpha = 0$

Η. $-\frac{1}{2}x^2 + 5x + 1 = 0$ Θ. $x^2 + 4\kappa x - 21\kappa^2 = 0$ Ι. $4x^2 - 4\kappa x - 35\kappa^2 = 0$

2. Να λυθούν οι εξισώσεις:

Α. $x^2 - (\sqrt{3}+1)x + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$ Β. $2x^2 + 2\sqrt{2}x - 2x - 2\sqrt{2} = 0$ Γ. $x^2 - 1{,}44 = 0$

Δ. $x^2 - 2\sqrt{3}x - 2x + 4\sqrt{3} = 0$ Ε. $\frac{x^2}{2} - x = 0$ ΣΤ. $3x(x-2) = 2x^2 - 5$

Ζ. $2x^2 - \kappa(\kappa - x) = 0$ Η. $x^2 - (\kappa^2 - \lambda^2)x - \lambda^2\kappa^2 = 0$ Θ. $\frac{x^2}{2} + \sqrt{3}x + 1 = 0$

3. Να βρείτε αν έχει ρίζες και πόσες καθεμιά από τις παρακάτω εξισώσεις χωρίς να τις λύσετε:

Α. $-x^2 + 4x + 5 = 0$ Β. $4x^2 + 3x + 2 = 0$ Γ. $2x^2 - 4x - 2\sqrt{3} = 0$

Δ. $x^2 - 6x + 9 = 0$ Ε. $x^2 - 6\alpha x + 9\alpha^2 = 0$ ΣΤ. $2x^2 - 3x + 17 = 0$

Ζ. $x^2 - (\alpha - 3)x + \alpha - 4 = 0$ Η. $\alpha^2x^2 = \alpha^2 - 5x$

4. Α. Να δείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν πάντα πραγματικές ρίζες.

α) $3\kappa x^2 + \lambda x - \kappa = 0$ β) $\kappa x^2 + (\kappa - \lambda)x - \lambda = 0$ γ) $x^2 + \frac{\kappa}{2}x - 3 = 0$

Β. Να δειχτεί ότι για όλες τις τιμές του κ οι εξισώσεις είναι αδύνατες.

α) $(\kappa^2+1)x - 2\kappa x + 1 = 0$ β) $9x^2 + 2 = 3\kappa(2x - \kappa)$ γ) $x^2 + \kappa x + \kappa + 1 = 0$

Γ. Να παραγοντοποιήσετε (αν αυτό είναι δυνατόν) τα παρακάτω τριώνυμα :

α. $f(x)=2x^2-3x+1$ β. $f(x)=9x^2-6x+1$ γ. $f(x)=x^2+3x+10$ δ. $f(x)= 2x^2-3\alpha x-2\alpha^2$

5. Α.Η εξίσωση $\lambda x^2 + 5x + 10 = 0$:

α) Για ποια τιμή του λ έχει μία λύση; β) Για ποια τιμή του λ έχει μια λύση διπλή;

γ) Να βρεθεί η διπλή ρίζα.

Β. Να κατασκευάσετε εξίσωση 2ου βαθμού που οι ρίζες της έχουν άθροισμα 7 και γινόμενο 10.

Γ. Να κατασκευάσετε εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς

$\frac{1}{\sqrt{2}+1}$ και $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$

Δ. Να βρείτε δύο αριθμούς που έχουν άθροισμα -1 και γινόμενο -20.

6. Α. Δείξτε ότι αν στην εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ τα α και γ είναι ετερόσημα, τότε η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.

Β. Να προσδιοριστεί η τιμή $\kappa \in R$ έτσι ώστε η εξίσωση $0{,}5x^2 + \kappa x + \frac{\lambda^2}{2} = 0$ να έχει ρίζα το 2 και στη συνέχεια να δειχτεί ότι δεν έχει άλλη ρίζα.

Γ. Για ποιες τιμές του κ η εξίσωση $2x(x+1) = \kappa - x^2$ έχει διπλή ρίζα; Ποια είναι η διπλή ρίζα;

Δ. Να βρεθεί η τιμή του α για την οποία η εξίσωση $x^2 + 4\alpha x + 4\alpha^2 = 0$ έχει ρίζα το -6 και στη συνέχεια να δειχτεί ότι για την τιμή αυτή του α η ρίζα είναι διπλή

Ε. Να βρεθεί η τιμή του κ για την οποία η εξίσωση $(1-\kappa)x^2 + 2x + \kappa + 1 = 0$ έχει διπλή ρίζα και στη συνέχεια να βρεθεί η ρίζα αυτή.

7. Η εξίσωση $x^2 + 2x - 8 = 0$ δέχεται ως ρίζα έναν από τους παρακάτω αριθμούς:

1, - 1, 2, - 2

Βρείτε ποιον και στη συνέχεια να βρείτε την άλλη ρίζα της εξίσωσης με δύο τρόπους, χωρίς να τη λύσετε.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το άθροισμα και το γινόμενο των δύο ριζών. Να γίνει το ίδιο και για τις εξισώσεις:

α) $x^2 + 7x - 8 = 0$ β) $2x^2 + 3x - 5 = 0$ γ) $- x^2 + x + 2 = 0$ δ) $x^2 + 3x + 4 = 0$

8. Α. Δίνεται η εξίσωση$x^2 + x + λ - 1 = 0$ με ρίζες x_1, x_2. Να βρείτε για ποια τιμή του λ είναι: $x_1x_2 + 3(x_1 + x_2) + 5 = 0$

Β. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - λx - λ^2 - 5 = 0$ με ρίζες x_1, x_2. Να βρεθεί ο λ έτσι ώστε να ισχύει η σχέση: $(x_1 - 2)(x_2 - 2) = -4$

Γ. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + 2λx + λ^2 - 4λ - 5 = 0$. Να βρεθεί ο λ έτσι ώστε να ισχύει η σχέση: $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{4}$

Δ. α) Αποδείξτε ότι η εξίσωση $x^2 + λx - 1 = 0$ έχει ρίζες πραγματικές, οποιοσδήποτε και αν είναι ο αριθμός λ.

β) Χωρίς να υπολογίσετε τις ρίζες αυτές, να βρείτε τις παρακάτω παραστάσεις:

i) $x_1 + x_2$ ii) x_1x_2 iii) $x_1^2 + x_2^2$ iv) $x_1x_2^2 + x_2x_1^2$

Ε. Αν x_1 και x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - x - 2 = 0$, να υπολογιστεί η τιμή των παραστάσεων:

α) $x_1 + x_2$ β) $x_1 \cdot x_2$ γ) $x_1^2 + x_2^2$ δ) $x_1^3 + x_2^3$ ε) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ ζ) $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$ η) $\frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3}$

ΣΤ. Να δειχτεί ότι αν x_1, x_2 είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 + px + q = 0$ τότε $x_1^2 + x_2^2 = p^2 - 2q$

9. Α. Για ποια τιμή του κ οι ρίζες της εξίσωσης $3x^2 + (κ-1)x - 2 = 0$ είναι αντίθετες

Β. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 20(μ + 3)x + μ^2 + 6μ - 5$ με ρίζες $ρ_1$, $ρ_2$. Αποδείξτε ότι η διαφορά $ρ_1 - ρ_2$ δεν εξαρτάται από το μ

Γ. Για ποια τιμή του α το άθροισμα των τετραγώνων των ριζών της εξίσωσης $x^2 - 8x + α = 0$ είναι 34;

Δ. Για ποιες τιμές του λ η εξίσωση $x^2 + (2λ+1)x + 2λ = 0$ έχει δύο ρίζες από τις οποίες η μια είναι τριπλάσια της άλλης.

Ε. Να βρεθεί η εξίσωση με ρίζες κατά 2 μεγαλύτερες από τις ρίζες της εξίσωσης $3x^2 - 8x + 4 = 0$.

ΣΤ. Ποιο είναι το κ, όταν η εξίσωση $κx^2 - 4x - 35 = 0$ έχει άθροισμα ριζών ίσο με 1;

Ζ. Ποιο είναι το κ όταν η εξίσωση $2x^2 + κ(x - 6) = 0$ έχει ρίζες των οποίων το γινόμενο είναι $-\frac{1}{2}$;

10. Α. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - (κ+1)x + κ = 0$ όπου $κ \in R$, να βρεθούν οι τιμές του κ ώστε: α) οι ρίζες x_1 και x_2 να είναι αντίθετες.

β) οι ρίζες x_1 και x_2 να είναι αντίστροφες.

Β. Ποιο είναι το κ όταν η εξίσωση $6x^2 + 7x + κ = 0$ έχει μια ρίζα διπλή;

Γ. Για ποιες τιμές του κ η εξίσωση $4x^2 + 4(3κ+2)x + 9κ^2 - 36 = 0$ έχει ρίζες:

α) ετερόσημες. β) ομόσημες. γ) θετικές.

δ) αρνητικές. ε) αντίθετες. στ) αντίστροφες.

Δ. Δίνεται η εξίσωση: $9x^2 + 6x + γ = 0$ με ρίζες $ρ_1$, $ρ_2$. Εάν γνωρίζουμε ότι $ρ_1 - ρ_2 = 2$, α) να βρείτε τις ρίζες $ρ_1$ και $ρ_2$ β) να βρείτε το γ

Διαγώνισμα 1

Εξισώσεις 2ου Βαθμού

θέμα 1ο

Α. Να δείξετε ότι το άθροισμα S και το γινόμενο P των ριζών της εξίσωσης

$\alpha x^2+\beta x+\gamma=0, \alpha\neq 0$ είναι:

$S=x_1+x_2=-\frac{\beta}{\alpha}$ $P=x_1x_2=\frac{\gamma}{\alpha}$

Β. Να δειξετε ότι αν δυο αριθμοί έχουν άθροισμα S και γινόμενο P τότε προσδιορίζονται από την λύση της εξίσωσης $x^2 - Sx + P = 0$

θέμα 2ο

Α. Να ελέγξετε αν οι παρακάτω εξισώσεις έχουν ρίζες. Στην περίπτωση που έχουν να υπολογίσετε το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών.

α. $x^2 - 3x + 14 = 0$ β. $- x^2 + 4x + 6 = 0$ γ. $2x^2 + 3x + 1 = 0$ δ. $2x^2 - 4x - 2\sqrt{3} = 0$

Β. Να εξεταστεί αν έχουν ρίζες και πόσες οι παρακάτω εξισώσεις:

α. $x^2+\alpha x-\beta^2=0,\ \alpha\neq 0$ β. $x^2-\alpha x-\beta^2=0$

θέμα 3ο

Αν x_1 , x_2 οι ρίζες της εξίσωσης x^2 -3x -1=0 να υπολογισθούν οι παραστάσεις

Α. x_1+x_2 Β.$x_1\, x_2$ Γ.$(1+x_1)(1+x_2)$ Δ.$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$ Ε.$x_1^2+x_2^2$ ΣΤ. $x_1^3+x_2^3$

θέμα 4ο

Δίνεται η εξίσωση $x^2+2\lambda x+4(\lambda-1)=0$, με παράμετρο $\lambda\in$IR.

Α. Να βρείτε τη διακρίνουσα της εξίσωσης.

Β. Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\in$IR.

Γ. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε να βρείτε για ποια τιμή του λ ισχύει: $(x_1+x_2)^2+x_1\cdot x_2+5=0$

Διαγωνίσματα

Διαγώνισμα 1
Επαναληπτικό

θέμα 1ο

Α. Τι ονομάζουμε απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού x;

Β. Να αποδείξετε $|x \cdot \psi| = |x| \cdot |\psi|$.

Γ. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα γράφοντας το γράμμα Σ (Σωστό) ή Λ (Λάθος)::

α. Οι ευθείες ε_1: ψ =3x + 4 και ε_2: 3x + ψ=4 είναι παράλληλες.

β. Αν x_1, x_2 οι ρίζες του τριωνύμου $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ τότε $S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha}$.

γ. Η ευθεία $x = x_0$ παριστάνει συνάρτηση.

δ. Η ευθεία ψ = -αx + 3 σχηματίζει πάντοτε αμβλεία γωνία με τον x΄x.

ε. Η ευθεία ψ = 0 παριστάνει συνάρτηση.

1	2	3	4	5

Μ.5+10+10

θέμα 2ο

Α. Έστω η συνάρτηση f με $f(x)=\sqrt{9x^2-6x+1}$.

α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f.

β. Να υπολογισθούν οι τιμές f(1) και $f\left(\frac{4}{3}\right)$.

γ. να λυθεί η ανίσωση f(x) -3<5

Μ.5+10+10

θέμα 3ο

Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = \sqrt{12-|4-x|}$.

Α. Να βρεθούν τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες.

Β. Να βρείτε την σχετική θέση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον x΄x.

Γ. Για την μεγαλύτερη τιμή του x που βρήκατε στο ερώτημα α, να λυθεί (ως προς λ) η εξίσωση $\left(\sqrt{\lambda}+2\right)x = 16(\lambda-4)$.

Δ. Για την τιμή του λ που βρήκατε να δείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της h με

$h(x) = (9 - \sqrt{\lambda})x^2 + (2\sqrt{\lambda}-6)x + 1 = 0$ δεν βρίσκεται κάτω από τον άξονα x΄x.

Μ.5+4+8+8

θέμα 4ο

Έστω τα σημεία Α(4κ + 2, 5 - 2λ) και Β(- 3κ – 1, 3 – 3λ) με κ, $\lambda \in \mathbb{R}$. Αν τα Α και Β είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα ψ΄ψ του ορθοκανονικού συστήματος.

Α. Να δείξετε ότι κ = - 1 και λ = - 2.

Β. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από τα Α και Β και να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας που σχηματίζει η γραφική της παράσταση , με τον x΄x.

Γ. Να συναληθεύσετε τις ανισώσεις $x^2+3x+1 \geq \lambda^2 x - \kappa$ και $1 \leq |x| \leq 3$.

Μ. 5+10+10