

Γιώργος Μονάντερος

Μαθηματικά

Β΄ Γυμνασίου

Βιβλίο Μαθητή

54 Κριτήρια Αξιολογικής

27 Διαγωνίσματα

15 Διαγωνίσματα Προσομοίωσης εξετάσεων

215 ασκήσεις

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Κεφάλαιο 1^ο ΑΛΓΕΒΡΑ

Ενότητα 1: Η έννοια της μεταβλητής –Αλγεβρικές παρατάσεις	Σελ. 9
Ενότητα 2: Εξισώσεις α' βαθμού	Σελ. 15
Ενότητα 3: Επίλυση προβλημάτων με τη χρήση εξισώσεων	Σελ. 21
Ενότητα 4: Τετραγωνική ρίζα θετικού αριθμού	Σελ. 27
Ενότητα 5: Άρρητοι αριθμοί –Πραγματικοί αριθμοί	Σελ. 33
Ενότητα 6: Προβλήματα	Σελ. 39
Ενότητα 7: Η έννοια της συνάρτησης	Σελ. 43
Ενότητα 8: Καρτεσιανές συντεταγμένες – Γραφική παράσταση συνάρτησης	Σελ. 49
Ενότητα 9: Η συνάρτηση $y=ax$	Σελ. 57
Ενότητα 10: Η συνάρτηση $y=ax+\beta$	Σελ. 63
Ενότητα 11: Η συνάρτηση $y=a/x$	Σελ. 69
Ενότητα 12: Βασικές έννοιες της Στατιστικής :Πληθυσμός –δείγμα	Σελ. 75
Ενότητα 13: Γραφικές παρατάσεις (Στατιστική).....	Σελ. 81
Ενότητα 14: Μέση τιμή - Διάμεσος	Σελ. 85

Κεφάλαιο 2^ο ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Ενότητα 15: Εμβαδόν επίπεδης επιφάνειας – Μονάδες μέτρησης

επιφανειώνΣελ. 93

Ενότητα 16: Εμβαδά επίπεδων σχημάτωνΣελ. 99

Ενότητα 17: Πυθαγόρειο θεώρημαΣελ. 105

Ενότητα 18: Εφαπτομένη οξείας γωνίαςΣελ. 111

Ενότητα 19: Ημίτονο και συνημίτονο οξείας γωνία.....Σελ. 117

Ενότητα 20: Εγγεγραμμένες γωνίες.....Σελ. 123

Ενότητα 21: Κανονικά πολύγωναΣελ. 131

Ενότητα 22: Μήκος κύκλουΣελ. 137

Ενότητα 23: Εμβαδόν κυκλικού δίσκουΣελ. 143

Ενότητα 24: Στοιχεία και εμβαδόν πρίσματος και κυλίνδρουΣελ. 149

Ενότητα 25: Όγκος πρίσματος και κυλίνδρουΣελ. 155

Ενότητα 26: Η πυραμίδα και τα στοιχεία τηςΣελ. 161

Ενότητα 27: Η σφαίρα και τα στοιχεία τηςΣελ. 169

Κεφάλαιο 3^ο

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΑ

ΔιαγωνίσματαΣελ. 175

Ενότητα 2

Εξισώσεις α' βαθμού

Θεωρία

Ιδιότητες

Αν και στα δύο μέλη μιας ισότητας **προσθέσουμε** τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι μια ισότητα. Δηλαδή: Αν $\alpha = \beta$ τότε $\alpha + \gamma = \beta + \gamma$.

Αν και από τα δύο μέλη μιας ισότητας **αφαιρέσουμε** τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι μια ισότητα. Δηλαδή: Αν $\alpha = \beta$ τότε $\alpha - \gamma = \beta - \gamma$.

Αν και τα δύο μέλη μιας ισότητας **πολλαπλασιαστούν** με τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι μια ισότητα. Δηλαδή: Αν $\alpha = \beta$ τότε $\alpha \gamma = \beta \gamma$.

Αν και τα δύο μέλη μιας ισότητας **διαιρεθούν** με τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι μια ισότητα. Δηλαδή: Αν $\alpha = \beta$ τότε $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\gamma}$ με $\gamma \neq 0$.

Έστω $3x + 2 = x + 6$.

Η ισότητα αυτή, που περιέχει τον άγνωστο αριθμό x , ονομάζεται **εξίσωση**.

Η παράσταση $3x + 2$ λέγεται **πρώτο μέλος** της εξίσωσης, ενώ η παράσταση $x + 6$ λέγεται **δεύτερο μέλος** αυτής.

Σε μία εξίσωση μπορούμε να «**μεταφέρουμε**» όρους από το ένα μέλος στο άλλο, **αλλάζοντας το πρόσημό τους**.

Γενικά για να λύσουμε μια εξίσωση ακολουθούμε τα εξής:

- A) Απαλοιφή παρονομαστών (αν υπάρχουν)
- B) Απλοποιούμε τα κλάσματα
- Γ) Κάνουμε τις πράξεις (αν υπάρχουν) (επιμεριστική ιδιότητα)
- Δ) Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους
- E) Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων
- ΣΤ) Διαιρούμε με τον συντελεστή του αγνώστου

Προσοχή

Έστω $0x = 3$

Στην περίπτωση αυτή, δε μπορούμε να λύσουμε ως προς x διαιρώντας με τον συντελεστή του αγνώστου, γιατί, όπως γνωρίζουμε, δε γίνεται διαίρεση με το 0.

Η εξίσωση αυτή δεν έχει καμία λύση. Μια τέτοια εξίσωση λέγεται **αδύνατη**.

Έστω $0x = 0$

Στην περίπτωση αυτή επίσης, δε μπορούμε να λύσουμε ως προς x διαιρώντας με τον συντελεστή του αγνώστου, γιατί όπως γνωρίζουμε, δε γίνεται διαίρεση με το 0.

Παρατηρούμε όμως, ότι η εξίσωση $0x = 0$ επαληθεύεται για όλες τις τιμές του x .

Δηλαδή, κάθε αριθμός είναι λύση της εξίσωσης. Μια τέτοια εξίσωση λέγεται **ταυτότητα**.

2^η Αξιολόγηση Σωστό – Λάθος

Εξισώσεις α' βαθμού

1. Η εξίσωση $2x = -8$ έχει λύση τον αριθμό -4 .
2. Η εξίσωση $-7x + x = x$ είναι αδύνατη.
3. Η εξίσωση $-3x + 4 = 7x - 6$ έχει λύση τον αριθμό 1 .
4. Η εξίσωση $-12x = 0$ είναι ταυτότητα.
5. Η εξίσωση $0x = 0$ είναι αδύνατη.
6. Δίνεται η εξίσωση $:k(x + 6) - 2 = (2k - 1)x + 2$. Αν $k = 2$, τότε η εξίσωση έχει λύση $x = 8$.
7. Η εξίσωση $4(1-x)=5-4x$ είναι αδύνατη.
8. Οι εξισώσεις $8+x= -2$ και $3-x=13$ είναι ισοδύναμες .
9. Η εξίσωση $ax=7+5x$ είναι αόριστη για $a=5$
10. Η εξίσωση $-4x+12=0$ έχει λύση τον αριθμό 3

[illegible]

2^η Αξιολόγηση Πολλαπλής Επιλογής

Εξισώσεις α' βαθμού

Θέμα 1^ο

Η εξίσωση $k(x-3)+15=3(x-k)$ είναι αδύνατη για:

Απάντηση

- A. $k = 2$ B. $k = -2$ Γ. $k = 3$ Δ. $k = -3$ Ε. $k = 1$

Θέμα 2^ο

Η εξίσωση $a(x-2)+10=2(x-a+5)$ είναι αόριστη για:

Απάντηση

- A. $a = 2$ B. $a = -2$ Γ. $a = 3$ Δ. $a = -3$ Ε. $a = 1$

Θέμα 3^ο

Η εξίσωση $\frac{2}{5} - \frac{x+1}{15} = \frac{6-x}{15}$ είναι :

Απάντηση

- A. αδύνατη B. αόριστη Γ. έχει μοναδική λύση
Δ. έχει 2 λύσεις Ε. δεν είναι α' βαθμού

Θέμα 4^ο

Η εξίσωση $\frac{6(x-2)}{4} + 2 = \frac{4(x+1)}{3} - 2$ έχει λύση :

Απάντηση

- A. 2 B. -2 Γ. 5 Δ. 4 Ε. -1

Θέμα 5^ο

Αν $A=2x-4$ και $B=3x+1$ τότε $2A=B$ για $x=$:

Απάντηση

- A. 10 B. 9 Γ. 12 Δ. 14 Ε. 6

Ασκήσεις

Εξισώσεις α' βαθμού

1. Να λύσετε τις εξισώσεις:
Α) $3(2x + 1) - 2(x - 1) = 3(x + 2)$ Β) $5(y + 1) + 2(y - 4) = 2y - (-4y - 7)$
Γ) $4(x + 2) + 7 = 7 - 2(x - 4)$
2. Α) Να λύσετε την εξίσωση $1 - \frac{2x-2}{6} + x = \frac{x-1}{3} + 2$
Β) Αν ρ είναι η λύση της παραπάνω εξίσωσης να υπολογίσετε την τιμή του λ ώστε να ισχύει: $\frac{\lambda - 2\rho}{4} - \rho + \frac{\lambda}{3} = \frac{5\lambda - 3\rho}{12} + \lambda$
3. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:
Α) $\frac{x-1}{7} + \frac{23-x}{5} = 7 - \frac{4+x}{4}$ Β) $\frac{1}{6}(8-x) + \frac{2}{3}(x-1) = \frac{1}{2}(x+6) - \frac{x}{3}$
Γ) $2x - \frac{1}{2}(19 - 2x) = \frac{1}{2}(2x - 11)$
4. Να λυθεί η εξίσωση:
Α) $\frac{x-3}{2} - \frac{2(1-x)}{3} = \frac{x}{2} + \frac{5x-4}{4}$ Β) $\frac{4x-5}{2} - \frac{4x-2}{5} = \frac{3(x-2)}{10} + \frac{x-1}{2}$
5. Να λυθεί η εξίσωση: Α) $\frac{x-4}{2} - \frac{x-9}{4} = 2x - \frac{3}{2}$ Β) $\frac{3x-2}{4} - \frac{x-2}{3} + 1 = \frac{5x}{6} - \frac{11}{12}$
Γ) $\frac{2(x-3)}{3} - \frac{5}{6}(x-5) = \frac{x-2}{2} - 1$
6. Έστω τρίγωνο. ΑΒΓ με ΑΒ=3x-12, ΑΓ=2x-5, ΒΓ=x-1. Να βρείτε την τιμή του x, ώστε να είναι ισοσκελές με βάση τη ΒΓ. Ποιο είναι σ' αυτή την περίπτωση το μήκος κάθε πλευράς;
7. Δίνεται η εξίσωση: $\alpha(x + 6) - 3 = (2\alpha - 1)x + 1$ α) Αν $\alpha = 2$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει λύση $x = 8$. β) Αν η εξίσωση έχει λύση $x = 7$, να αποδείξετε ότι $\alpha = 3$. γ) Αν $\alpha = 1$, να λύσετε την εξίσωση
8. Να λυθεί η εξίσωση: Α) $\frac{x-4}{2} - \frac{x-9}{4} = 2x - \frac{3}{2}$ Β) $\frac{3x-2}{4} - \frac{x-2}{3} + 1 = \frac{5x}{6} - \frac{11}{12}$

Διαγώνισμα

Εξισώσεις α' βαθμού

Θέμα 1°

Η εξίσωση $\frac{2}{4} - \frac{x+1}{8} = \frac{6-x}{8}$ είναι :

Απάντηση

A. αδύνατη
Δ. έχει 2 λύσεις

B. αόριστη
E. δεν είναι α' βαθμού

Γ. έχει μοναδική λύση

Θέμα 2°

Να λυθεί η εξίσωση:

A) $\frac{2 \cdot (x-3)}{3} - \frac{5}{6} \cdot (x-5) = \frac{x-2}{2} - 1$

B) $\frac{2 \cdot (x-3)}{5} - \frac{3 \cdot (x-2)}{4} = 1$

Γ) $\frac{x+6}{2} + \frac{2(x+17)}{3} + \frac{5(x-10)}{6} = 2x+6$

Δ) $\frac{x+1}{4} - \frac{2x-1}{5} + \frac{3x+1}{2} = \frac{27x+19}{20}$

Θέμα 3°

Έστω τρίγωνο. ΑΒΓ με ΑΒ = 4x-8,5 , ΑΓ = 2x+5,5 και ΒΓ=x+1. Να βρείτε την τιμή του x, ώστε να είναι ισοσκελές με βάση τη ΒΓ. Ποιο είναι σ' αυτή την περίπτωση το μήκος κάθε πλευράς; Μπορεί για κάποια τιμή του x το τρίγωνο να είναι ισοσκελές με βάση την πλευρά ΑΒ;

Ενότητα 17

Πυθαγόρειο θεώρημα

A. Θεωρία

Διδακτικοί στόχοι

Οι μαθητές επιδιώκεται:

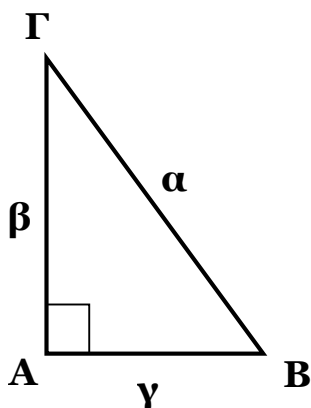
- να γνωρίζουν το Πυθαγόρειο θεώρημα και το αντίστροφό του,
- να επιλύουν προβλήματα με τη χρήση του Πυθαγόρειου θεωρήματος,
- να ελέγχουν αν ένα τρίγωνο με γνωστές πλευρές είναι ορθογώνιο.

ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΘΕΩΡΗΜΑ

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το άθροισμα των τετραγώνων των δύο κάθετων πλευρών είναι ίσο με το τετράγωνο της υποτείνουσας.

Δηλ.

$$\beta^2 + \gamma^2 = \alpha^2$$



Το αντίστροφο του Πυθαγορείου θεωρήματος

Αν σε ένα τρίγωνο, το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών, τότε η γωνία που βρίσκεται απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά είναι ορθή.

17^η Αξιολόγηση Σωστό – Λάθος

Πυθαγόρειο θεώρημα

Αν σε ένα τρίγωνο, η μεγαλύτερη πλευρά είναι ίση με το άθροισμα

1. των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών, τότε η γωνία που βρίσκεται απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά είναι ορθή.

2. Σε κάθε τρίγωνο το άθροισμα των τετραγώνων των δύο κάθετων πλευρών είναι ίσο με το τετράγωνο της υποτεινουσας.

3. Αν τετραπλασιάσουμε τις πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου, τότε το τρίγωνο που προκύπτει είναι πάλι ορθογώνιο.

4. Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει: $ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2$.

Αν σε ένα τρίγωνο η διαφορά των τετραγώνων

- 5.** των δύο πλευρών του ισούται με το τετράγωνο της τρίτης πλευράς, τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

Αν για το τρίγωνο ΚΛΜ ισχύει $KM^2 = KL^2 + LM^2$,

6. τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο στο Μ.

7. Αν σε ένα τρίγωνο οι πλευρές του είναι 5cm ,12 cm και 13 cm τότε αυτό το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

8. Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με ορθή γωνία την B ισχύει: $B\Gamma^2 = A\Gamma^2 - AB^2$.

9. Αν σε ένα τρίγωνο οι πλευρές του είναι 3cm ,4 cm και 7 cm τότε αυτό το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

10. Γνωρίζοντας τα μήκη των διαγώνιων σε έναν ρόμβο, μπορούμε να υπολογίσουμε την πλευρά του ρόμβου.

[illegible]

17^η Αξιολόγηση Πολλαπλής Επιλογής

Πυθαγόρειο θεώρημα

Θέμα 1^ο

Σε ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές 9 cm και 12 cm αντίστοιχα ισχύει ότι η υποτείνουσα είναι :

Απάντηση

A. 21 cm B. 15 cm Γ. 18 cm Δ. 25cm Ε. 20cm

Θέμα 2^ο

Σε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με πλευρές $(5x+2)$ cm και $(4x-3)$ cm και περίμετρο 34cm η διαγώνιος του είναι:

Απάντηση

A. 21 cm B. 15 cm Γ. 18 cm Δ. 13cm Ε. 12cm

Θέμα 3^ο

Τρίγωνο ΑΒΓ με $BΓ=(2x+4)$ cm , $AΓ=(-x+11)$ cm και $AB=(4x-6)$ cm και περίμετρο 24 cm είναι:

Απάντηση

A. Ορθογώνιο με $A=90^\circ$ B. Ορθογώνιο με $B=90^\circ$ Γ. Ορθογώνιο με $\Gamma=90^\circ$
Δ. Οξυγώνιο Ε. Αμβλυγώνιο

Θέμα 4^ο

Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB = A\Gamma = 13$ cm και $B\Gamma = 10$ cm . Το ύψος από την κορυφή Α είναι:

Απάντηση

A. 10 cm B. 11 cm Γ. 12 cm Δ. 13 cm Ε. 9 cm

Θέμα 5^ο

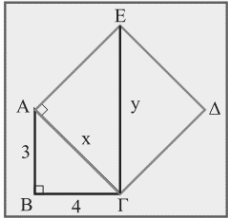
Το μήκος της πλευράς ενός ισοπλεύρου τριγώνου είναι 8cm. Το ύψος του είναι:

Απάντηση

A. $4\sqrt{5}$ cm B. 4 cm Γ. $2\sqrt{3}$ cm Δ. $4\sqrt{5}$ cm Ε. $4\sqrt{3}$ cm

Ασκήσεις

Πυθαγόρειο θεώρημα

1. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($A=90^\circ$) με $A\Gamma=8\text{cm}$ και $AB=6\text{cm}$.
Να υπολογίσετε: α) το εμβαδόν του τριγώνου β) την υποτείνουσα $B\Gamma$
γ) το ύψος προς την $B\Gamma$
 2. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με περίμετρο 48cm . Αν $AB = 3x - 3$, $A\Gamma = 3x + 1$ και $B\Gamma = 4x$. α) Να βρεθεί το x β) Να εξετάσετε αν το τρίγωνο είναι ορθογώνιο;
 3. Στο διπλανό σχήμα το $A\Gamma\Delta E$ είναι τετράγωνο.
Να υπολογιστούν:
α) Η πλευρά x του τετραγώνου.
β) Η διαγώνιος y του τετραγώνου.
γ) Το εμβαδόν E του τετραγώνου
- 
4. Η πλευρά ενός τετραγώνου είναι το ύψος ενός ισόπλευρου τριγώνου πλευράς 6cm . Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραγώνου.
 5. Ένα ορθογώνιο έχει διαστάσεις $3x$ και $4x$ και η διαγώνίός του είναι 25cm .
Να βρείτε τις διαστάσεις του, την περίμετρο και το εμβαδόν του.
 6. Να υπολογίσετε τις πλευρές ορθογωνίου τριγώνου, όταν γνωρίζετε ότι η υποτείνουσα είναι διπλάσια μιας κάθετης πλευράς και ότι η άλλη κάθετη πλευρά είναι 6cm .
 7. Να εξετάσετε εάν είναι ορθογώνια τα εξής τρίγωνα $AB\Gamma$ με πλευρές:
Α) $AB = 1$, $B\Gamma = \sqrt{2}$, $\Gamma A = \sqrt{3}$
Β) $AB = 7$, $B\Gamma = 6$, $\Gamma A = \sqrt{15}$
Γ) $AB = \sqrt{5}$, $A\Gamma = \sqrt{6}$, $B\Gamma = \sqrt{11}$
Δ) $AB = \sqrt{10}$, $A\Gamma = \sqrt{12}$, $B\Gamma = \sqrt{23}$
 8. Το ύψος ενός ισοπλεύρου τριγώνου είναι 7cm . Να βρεθεί η πλευρά του και το εμβαδόν του.

Διαγώνισμα

Πυθαγόρειο θεώρημα

Θέμα 1°

Σε ορθογώνιο παραλληλόγραμμα με πλευρές $(x+2)$ cm και $(3x-4)$ cm και περίμετρο 28cm η διαγώνιος του είναι:

Απάντηση

A. 9 cm B. 10 cm Γ. 11 cm Δ. 12 cm E. 15 cm

Θέμα 2°

Σε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ η διαγώνιος ΑΓ = 10cm και η πλευρά ΑΒ = 8cm. Αν Ε είναι το μέσο της ΒΓ, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραγώνου που έχει πλευρά την ΑΕ.

Θέμα 3°

Η περίμετρος του τριγώνου ΑΒΓ είναι 30cm. Να εξετάσετε αν το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

