

Γιώργος Μονάντερος

Μαθηματικά

Γ' Γυμνασίου

Βιβλίο Μαθητή

62 Κριτήρια Αξιολόγησης

31 Διαγωνίσματα

15 Διαγωνίσματα Προσομοίωσης εξετάσεων

248 ασκήσεις

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Κεφάλαιο 1^ο ΑΛΓΕΒΡΑ

Ενότητα 1: Οι πραγματικοί αριθμοί και οι πράξεις τους	Σελ. 9
Ενότητα 2: Δυνάμεις πραγματικών αριθμών.....	Σελ. 15
Ενότητα 3: Τετραγωνική ρίζα πραγματικού αριθμού.....	Σελ. 21
Ενότητα 4: Αλγεβρικές παραστάσεις –Μονώνυμα.....	Σελ. 27
Ενότητα 5: Πράξεις με μονώνυμα.....	Σελ. 33
Ενότητα 6: Πρόσθεση -αφαίρεση πολυωνύμων.....	Σελ. 39
Ενότητα 7: Πολλαπλασιασμός πολυωνύμων.....	Σελ. 45
Ενότητα 8: Αξιοσημείωτες Ταυτότητες.....	Σελ. 51
Ενότητα 9: Παραγοντοποίηση αλγεβρικών παραστάσεων.....	Σελ. 59
Ενότητα 10: Ε.Κ.Π. και Μ.Κ.Δ. αλγεβρικών παραστάσεων.....	Σελ. 65
Ενότητα 11: Ρητές αλγεβρικές παραστάσεις.....	Σελ. 71
Ενότητα 12: Πράξεις ρητών παραστάσεων.....	Σελ. 77
Ενότητα 13: Η εξίσωση $ax+\beta=0$	Σελ. 85
Ενότητα 14: Επίλυση εξισώσεων β' βαθμού από τον τύπο.....	Σελ. 91
Ενότητα 15: Προβλήματα εξισώσεων δευτέρου βαθμού.....	Σελ. 97
Ενότητα 16: Κλασματικές εξισώσεις.....	Σελ. 103
Ενότητα 17: Ανισότητες - Ανισώσεις με έναν άγνωστο.....	Σελ. 109
Ενότητα 18: Η έννοια της γραμμικής εξίσωσης.....	Σελ. 115
Ενότητα 19: Η έννοια του γραμμικού συστήματος και η γραφική επίλυσή	

του.....	Σελ. 121
Ενότητα 20 : Αλγεβρική επίλυση γραμμικού συστήματος.....	Σελ. 127
Ενότητα 21: Σύνολα.....	Σελ. 133
Ενότητα 22: Δειγματικός χώρος -Ενδεχόμενα.....	Σελ. 139
Ενότητα 23: Η έννοια της πιθανότητας.....	Σελ. 145

Κεφάλαιο 2^ο ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Ενότητα 24: Ισότητα τριγώνων.....	Σελ. 155
Ενότητα 25: Λόγος ευθυγράμμων τμημάτων.....	Σελ. 161
Ενότητα 26: Θεώρημα Θαλή.....	Σελ. 167
Ενότητα 27: Όμοια πολύγωνα - Όμοια τρίγωνα.....	Σελ. 173
Ενότητα 28: Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας ω με $0 \leq \omega \leq 180^\circ$	Σελ. 179
Ενότητα 29: Τριγωνομετρικοί αριθμοί παραπληρωματικών γωνιών.....	Σελ. 185
Ενότητα 30: Σχέσεις τριγωνομετρικών αριθμών γωνίας.....	Σελ. 191
Ενότητα 31: Νόμος των Ημιτόνων- Νόμος των συνημίτονων.....	Σελ. 197

Κεφάλαιο 3^ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΑ

Ενότητα 32: Διαγωνίσματα	Σελ. 203
--------------------------------	----------

Ενότητα 14

Επίλυση εξισώσεων β' βαθμού

Θεωρία

Διδακτικοί στόχοι

Οι μαθητές λύνουν εξισώσεις δευτέρου βαθμού με ανάλυση σε γινόμενο παραγόντων.

Βρίσκουν το πλήθος των λύσεων μιας εξίσωσης δευτέρου βαθμού και υπολογίζουν τις λύσεις της με τη βοήθεια τύπου.

Μετατρέπουν ένα τριώνυμο σε γινόμενο παραγόντων.

Μέθοδος επίλυσης εξισώσεων 2^{ου} βαθμού

Για την επίλυση της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0$ με $a \neq 0$ υπολογίζουμε πρώτα την ποσότητα $\Delta = b^2 - 4a\gamma$ η οποία ονομάζεται **διακρίνουσα**. Μετά την επιλύουμε σύμφωνα με τον παρακάτω πίνακα:

$\Delta = b^2 - 4a\gamma$	Η εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0$, $a \neq 0$
$\Delta > 0$	Έχει δύο ρίζες άνισες τις $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
$\Delta = 0$	Έχει μια διπλή ρίζα τη $x = -\frac{b}{2a}$
$\Delta < 0$	Είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$

Παραγοντοποίηση τριωνύμου

Η παράσταση $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$ με $a \neq 0$, λέγεται **τριώνυμο**.

Διακρίνουσα του τριωνύμου ονομάζεται η διακρίνουσα της αντίστοιχης εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0$.

Ρίζες του τριωνύμου ονομάζονται οι ρίζες της αντίστοιχης εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0$ και είναι ρίζες και της πολυωνυμικής συνάρτησης 2^{ου} βαθμού.

Η **παραγοντοποίηση του τριωνύμου** γίνεται σύμφωνα με τον παρακάτω πίνακα:

Αν $\Delta > 0$ και ρ_1, ρ_2 οι ρίζες του τριωνύμου τότε:	$ax^2 + bx + \gamma = a(x - \rho_1)(x - \rho_2)$
Αν $\Delta = 0$ και ρ η μία διπλή ρίζα του τριωνύμου τότε:	$ax^2 + bx + \gamma = a(x - \rho)^2$
Αν $\Delta < 0$ τότε:	δεν παραγοντοποιείται

14^η Αξιολόγηση Σωστό – Λάθος

Επίλυση εξισώσεων β' βαθμού

- 1.** Οι λύσεις της εξίσωσης $(x - 4)(x + 2) = 0$ είναι $x = 4$ και $x = -2$.

- 2.** Η εξίσωση $x^2 = 25$ έχει μοναδική λύση τον αριθμό $x = 5$.

- 3.** Η εξίσωση $(x - 1)^2 = 0$ έχει διπλή λύση τον αριθμό $x = 1$.

4. Η εξίσωση $x^2 + 2x - 5 = x(x - 7)$ είναι 2ου βαθμού.

- 5.** Η εξίσωση $x^2 = -9$ έχει λύση τον αριθμό $x = -3$

6. Αν μία εξίσωση 2ου βαθμού έχει διακρίνουσα θετική ή μηδέν, τότε έχει μία τουλάχιστον λύση.

7. Αν μία εξίσωση 2ου βαθμού έχει διακρίνουσα αρνητική , τότε δεν έχει λύση.

8. Η εξίσωση $2x^2 + 2x - 4 = 0$ έχει ως λύσεις τους αριθμούς 1 και -2 ,
οπότε το τριώνυμο $2x^2 + 2x - 4$ γράφεται $2x^2 + 2x - 4 = (x - 1)(x + 2)$.

9. Αν μία εξίσωση 2ου βαθμού έχει διακρίνουσα αρνητική , τότε δεν παραγοντοποιείται.

- 10.** Οι λύσεις της εξίσωσης $x^2 - 4x + 5 = 0$ είναι $x = 5$ και $x = -1$.

[illegible]

14^η Αξιολόγηση Πολλαπλής Επιλογής

Επίλυση εξισώσεων β' βαθμού

Θέμα 1^ο

Η εξίσωση $x^2 - 2κx + 7κ^2 = 0, κ \neq 0$ έχει:

Απάντηση

A. Δυο ρίζες
Δ. καμία ρίζα

B. Δυο ρίζες άνισες
E. μια τουλάχιστον ρίζα

Γ. Δυο ρίζες ίσες

Θέμα 2^ο

Η εξίσωση $4x(x^2 - 4) = 0$ έχει ως ρίζες:

Απάντηση

A. $\rho = 0$

B. $\rho_1 = 0$ ή $\rho_2 = 2$

Γ. $\rho_1 = 0$ και $\rho_2 = 2$ και $\rho_3 = -2$

Δ. $\rho_1 = 0$ ή $\rho_2 = 2$ ή $\rho_3 = -2$

E. $\rho_1 = 2$ ή $\rho_2 = -2$

Θέμα 3^ο

Αν η εξίσωση $x^2 - 2\beta x + (\beta^2 + \gamma) = 0$ δεν έχει ρίζες πραγματικές, τότε :

Απάντηση

A. $\gamma \neq 0$

B. $\gamma > 0$

Γ. $\gamma < 0$

Δ. $\gamma = 0$

E. $\beta \neq 0$

Θέμα 4^ο

Αν $\Delta > 0$ και ρ_1, ρ_2 οι δυο άνισες ρίζες του τριωνύμου τότε:

Απάντηση

A. $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = (x - \rho_1)(x - \rho_2)$

B. $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = -\alpha(x - \rho_1)(x - \rho_2)$

Γ. $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x + \rho_1)(x + \rho_2)$

Δ. $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - \rho_1)(x - \rho_2)$

E. $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x + \rho_1)(x - \rho_2)$

Θέμα 5^ο

Αν εξίσωση $x^2 - 2x + \alpha = 0$ έχει δυο ρίζες άνισες τότε για το α ισχύει:

Απάντηση

A. $\alpha < 1$

B. $\alpha > 1$

Γ. $\alpha \leq 1$

Δ. $\alpha \geq 1$

Ε. $\alpha = 1$

Ασκήσεις

Επίλυση εξισώσεων β' βαθμού

1. Να λυθούν οι εξισώσεις :

A) $-2(x+4)x^2 = 0$ B) $2x^2 - 10x = 0$ Γ) $3x^2 = 12$ Δ) $5x^2 - 20 = 0$

2. Να λυθούν οι εξισώσεις :

A) $x^2 + 16 = 0$ B) $(x^2 - 2x) \cdot (x^2 - 9) = 0$ Γ) $x^3 - 4x = 0$ Δ) $2(x-4) = x^2 - 8$

3. Να λυθούν οι εξισώσεις :

A) $-2x^2 + 8x - 6 = 0$ B) $x^2 - (\sqrt{2} + 2)x + 2\sqrt{2} = 0$ Γ) $2x^2 - x - 3 = 0$

Δ) $x^2 + 7x + 6 = 0$ Ε) $7x^2 - 4x + 1 = 0$ ΣΤ) $9x^2 - 7x + 12 = 2(4x^2 + 1)$

4. Να λυθούν οι εξισώσεις: A) $\frac{x-1}{3} - 2 = \frac{x}{2} - 3(x-3)$, B) $4x - 2(x-3) - 1 = 2x$

5. Να λυθούν οι εξισώσεις:

A) $x - \frac{x^2 - 2}{2} = -3$ B) $x^2 - \frac{2x-1}{6} = x - \frac{x^2}{3}$ Γ) $(5x-10) \cdot (x-1)^2 = (3x-6) \cdot (x^2-1)$

6. Απλοποιήστε τις παρακάτω κλασματικές παραστάσεις:

A) $\frac{x^2 + x - 12}{x^2 - 4x + 3}$ B) $\frac{x^2 - 16}{x^2 - 5x + 4}$ Γ) $\frac{x^2 - 5x + 4}{3x^2 - 11x - 4}$ Δ) $\frac{2x^2 + 2x + \frac{1}{2}}{4x^2 - 6x + 2}$

7. Αν κ, λ πραγματικοί αριθμοί με $\kappa \neq 0$, να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν μία τουλάχιστον λύση α) $\kappa x^2 - x + 1 - \kappa = 0$
β) $\kappa x^2 + (\kappa + \lambda)x + \lambda = 0$.

8. Δίνεται η εξίσωση $\alpha x^2 + \gamma x^2 - 2\beta x + \alpha - \gamma = 0$, όπου α, β, γ είναι τα μήκη των πλευρών τριγώνου ΑΒΓ. Αν η εξίσωση έχει μία διπλή λύση, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

Διαγώνισμα

Επίλυση εξισώσεων β' βαθμού

Θέμα 1°

Αν εξίσωση $x^2 - 4x + 2(\alpha - 1) = 0$ έχει δυο ρίζες άνισες τότε για το α ισχύει:

Απάντηση

A. $\alpha < 3$

B. $\alpha > 3$

Γ. $\alpha \leq 3$

Δ. $\alpha \geq 4$

Ε. $\alpha = 3$

Θέμα 2°

Να λυθούν οι εξισώσεις :

A) $-x^2 + 8x - 7 = 0$ B) $x^2 - (\sqrt{5} - 3)x - 3\sqrt{5} = 0$ Γ) $3x^2 - x - 4 = 0$

Θέμα 3°

Αν α, β πραγματικοί αριθμοί με $\alpha \neq 0$, να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν μία τουλάχιστον λύση α) $\alpha x^2 - 2x + 2 - \alpha = 0$ β) $\alpha x^2 + (2\alpha + \beta)x + 2\beta = 0$

Ενότητα 24

Ισότητα τριγώνων

Θεωρία

Διδακτικοί στόχοι

Οι μαθητές θυμούνται ποια είναι τα στοιχεία ενός τριγώνου (κύρια – δευτερεύοντα) και τα είδη των τριγώνων.

Μαθαίνουν πότε δύο τρίγωνα είναι ίσα και ποια είναι τα κριτήρια ισότητας τριγώνων.

Μαθαίνουν ποια είναι τα κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων

Ίσα τρίγωνα

Α) Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες, τότε είναι ίσα.

Β) Αν δύο τρίγωνα είναι ίσα, τότε θα έχουν τις πλευρές τους και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες μία προς μία.

Κριτήρια ισότητας τριγώνων

1ο κριτήριο ισότητας (Π – Γ – Π)

Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και την περιεχόμενη γωνία τους ίση, τότε είναι ίσα.

2ο κριτήριο ισότητας (Γ – Π – Γ).

Αν δύο τρίγωνα έχουν μία πλευρά ίση και τις προσκείμενες στην πλευρά αυτή γωνίες ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.

3ο κριτήριο ισότητας (Π – Π – Π).

Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.

Κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων

Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, όταν έχουν

- δύο αντίστοιχες πλευρές ίσες μία προς μία ή
- μία αντίστοιχη πλευρά ίση και μία αντίστοιχη οξεία γωνία ίση.

Προσοχή

A. Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο:

i) Οι γωνίες της βάσης του είναι ίσες.

ii) Η διχοτόμος, το ύψος και η διάμεσος που φέρουμε από την κορυφή προς τη βάση του συμπίπτουν.

B. Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του.

Γ. Κάθε σημείο που ισαπέχει από τα άκρα ενός ευθύγραμμου τμήματος είναι σημείο της μεσοκαθέτου του ευθύγραμμου τμήματος.

Δ. Κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας.

Ε. Κάθε εσωτερικό σημείο μιας γωνίας που ισαπέχει από τις πλευρές της είναι σημείο της διχοτόμου της.

24^η Αξιολόγηση Σωστό – Λάθος

Ισότητα τριγώνων

1. Αν δύο τρίγωνα έχουν τις δυο γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.
2. Αν δύο τρίγωνα έχουν τις δυο πλευρές τους ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.
3. Σε δύο τρίγωνα απέναντι από ίσες γωνίες βρίσκονται ίσες πλευρές.
4. Σε δύο ίσα τρίγωνα απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες.
5. Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία, τότε θα έχουν και την τρίτη τους πλευρά ίση.
6. Αν δυο τρίγωνα έχουν δυο γωνίες και μια πλευρά αντίστοιχα ίσες τότε είναι ίσα
7. Αν δυο τρίγωνα έχουν δυο πλευρές και μια γωνία αντίστοιχα ίσες τότε είναι ίσα.
8. Κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας.
9. Κάθε σημείο που ισαπέχει από τα άκρα ενός ευθύγραμμου τμήματος είναι σημείο της μεσοκαθέτου του ευθύγραμμου τμήματος.
10. Κάθε εσωτερικό σημείο μιας γωνίας που ισαπέχει από τις πλευρές της είναι σημείο της διχοτόμου της.

[illegible]

24^η Αξιολόγηση Πολλαπλής Επιλογής

Ισότητα τριγώνων

Θέμα 1^ο

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ. Τότε οι άλλες δυο γωνίες του είναι :

Απάντηση

Α. Συμπληρωματικές Β. Παραπληρωματικές Γ. Ίσες Δ. Άνισες Ε. Κατακορυφήν

Θέμα 2^ο

Αν οι γωνίες ενός τριγώνου είναι $A = 3x$, $B = x + \frac{x}{2}$ και $\Gamma = 60^\circ - \frac{x}{2}$ τότε το τρίγωνο είναι :

Απάντηση

Α. Ισόπλευρο Β. Σκαλινό Γ. Αμβλυγώνιο
Δ. Ορθογώνιο και ισοσκελές Ε. Δεν υπάρχει τέτοιο τρίγωνο

Θέμα 3^ο

Σε ένα τρίγωνο μόνο το ένα ύψος του είναι ταυτόχρονα και διάμεσος και διχοτόμος, τότε το τρίγωνο είναι:

Απάντηση

Α. Ισόπλευρο Β. Σκαλινό Γ. Αμβλυγώνιο
Δ. Ισοσκελές Ε. Δεν υπάρχει τέτοιο τρίγωνο

Θέμα 4^ο

Ένα σημείο ισαπέχει από τα άκρα ενός ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ, Τότε το σημείο αυτό ανήκει :

Απάντηση

Α. Στο ύψος του ΑΒ Β. Είναι εξωτερικό σημείο του ΑΒ
Γ. Στην μεσοκάθετο του ΑΒ Δ. Στη διχοτόμο του ΑΒ
Ε. Δεν υπάρχει τέτοιο σημείο

Θέμα 5^ο

Σε τρίγωνο υπάρχει και ύψος που είναι εκτός του τριγώνου ,τότε το τρίγωνο είναι :

Απάντηση

Α. Ισόπλευρο Β. Σκαλινό Γ. Αμβλυγώνιο
Δ. Ισοσκελές Ε. Δεν υπάρχει τέτοιο τρίγωνο

Ασκήσεις

Ισότητα τριγώνων

1. Στις πλευρές AB , $BΓ$, $ΓA$ ισοπλεύρου τριγώνου $ABΓ$, παίρνουμε σημεία Δ , E, Z αντιστοίχως, ώστε $AD=BE=\Gamma Z$. Αποδείξτε ότι το τρίγωνο ΔEZ είναι ισόπλευρο.
2. Έστω κυρτό τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $AB=B\Gamma$ και $\hat{A} = \hat{\Gamma}$. Να δείξετε ότι $AD=\Delta\Gamma$.
3. Εξωτερικά ενός ισοπλεύρου τριγώνου $AB\Gamma$ ($AB=A\Gamma$) κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα ABE και $A\Gamma\Delta$. Να δείξετε ότι:
i) $BD=GE$
ii) Αν K, Λ, M τα μέσα των πλευρών $EA, AD, B\Gamma$ αντίστοιχα να δείξετε ότι το τρίγωνο $K\Lambda M$ είναι ισοσκελές.
4. Σε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ οι διάμεσοι $B\Delta$ και ΓE είναι ίσες. Προεκτείνουμε το $E\Delta$ και παίρνουμε τμήμα $\Delta K=E\Delta$. Επίσης προεκτείνουμε το ΔE και παίρνουμε τμήμα $EM=E\Delta$. Να δειχθεί ότι:
i) Το AMK είναι ισοσκελές ii) Τα τρίγωνα AME και ΔAK είναι ίσα
5. Στη βάση $B\Gamma$ ενός ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$ να πάρετε σημεία Δ, E , ώστε $B\Delta = \Gamma E$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές (Να εξετάσετε δυο περιπτώσεις).
6. Μια ευθεία (ϵ) διέρχεται από το μέσον M ενός τμήματος AB . Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B ισαπέχουν από την ευθεία (ϵ).
7. Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($A = 90^\circ$) να φέρετε τη διχοτόμο $\Gamma\Delta$. Αν $\Delta Z \perp B\Gamma$, να αποδείξετε ότι $A\Gamma = \Gamma Z$.
8. Σ' ένα τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ η διαγώνιος $B\Delta$ διχοτομεί τις γωνίες B και Δ . Να αποδείξετε ότι $AB = B\Gamma$ και $A\Delta = \Gamma\Delta$.

Διαγώνισμα

Ισότητα τριγώνων

Θέμα 1^ο

Αν οι γωνίες ενός τριγώνου είναι $A = 4x$, $B = 30^\circ + 2x$ και $\Gamma = 70^\circ - \frac{2x}{3}$ τότε το

τρίγωνο είναι :

Απάντηση

A. Ισόπλευρο

B. Σκαλινό

Γ. Αμβλυγώνιο

Δ. Ορθογώνιο και ισοσκελές

Ε. Δεν υπάρχει τέτοιο τρίγωνο

Θέμα 2^ο

Στις προεκτάσεις της βάσης ΒΓ ενός ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ να πάρετε σημεία Δ, Ε, ώστε $BD = GE$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές.

Θέμα 3^ο

Να δείξετε ότι αν ένα τρίγωνο έχει δυο ύψη ίσα, τότε είναι ισοσκελές.